分类号________________ 密级________________

U D C ________________ 编号________________

厦　门　大　学

博 士 后 研 究 工 作 报 告

单 位 球 面 间 等 距 算 子 的 延 拓

伊 继 金

工作完成日期　2014 年 11 月

报告提交日期　2014 年 11 月

厦　门　大　学

2014 年 11 月

单 位 球 面 间 等 距 算 子 的 延 拓

Extension of isometries between the unit spheres

博　士　后　姓　名：　伊　继　金
流动站（一级学科）名称：　厦门大学数学科学学院
专　业（二级学科）名称：　基　础　数　学

研究工作起始时间　2010　年　11　月

研究工作期满时间　2014　年　11　月

厦　门　大　学

2014 年 11 月

厦门大学博士后研究工作报告
著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用博士后研究工作报告的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交该报告的纸质版和电子版，有权将该报告用于非赢利目的的少量复制并允许该报告进入学校图书馆被查阅，有权将该报告的内容编入有关数据库进行检索，有权将博士后研究工作报告的标题和摘要汇编出版。保密的博士后研究工作报告在解密后适用本规定。

本研究报告属于：　　1、保密（　），2、不保密（）

纸本在　　　年解密后适用本授权书；

电子版在　　　年解密后适用本授权书。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　日期：　　　　年　月　日

导师签名:　　　　　　日期：　　　　年　月　日

摘要

本文要研究的是单位球面间等距算子的延拓. 这一专题已经有一些经典的结果. 本文着重研究复$l^p(\Gamma)(p>1)$空间单位球面间等距算子的延拓问题.

具体地说，分为以下步骤证明了本文最终的结论：

1、讨论了复的$l^p(\Gamma)(p>1)$空间单位球面上元素的复杂性.

2、讨论了$l^p(\Gamma)(p>1)$单位球面间的等距映射的若干独特性质.

3、通过引理得到$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p>1)$单位球面间满等距映射将元素αe_γ（只在位置γ处有非零的分量）映为特殊元素$\alpha' d_{\sigma(\gamma)}$（只在位置$\sigma(\gamma)$处有非零的分量）.这里的$\alpha,\alpha'\in S(C)$ 并且它们并非同一数值，非零分量的位置也发生了漂移.

4、我们证明了$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p>1)$单位球面间满等距映射尽管不能保证3中的$\alpha=\alpha'$，但是却得到了α到α'的映射是$S(C)$到$S(C)$的满射.

5、接下来我们证明关键的结论$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p>1)$单位球面间满等距映射V_0将$l^p(\Gamma)$单位球面上的元素的线性组合映为$l^p(\Delta)$单位球面上完全类似的线性组合.

6、最后我们证明了$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p>1)$单位球面间满等距映射能延拓为全空间上的实线性等距映射.

关键词： 单位球面；等距延拓；等距映射；严格凸

Abstract

In this paper, we study the extension of isometries between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$ and $l^p(\Delta)(p>1)$. And there have been some classic results about this topic. We get the final result using 6 steps.

1. We discuss the complexity of the element on the sphere of complex $l^p(\Gamma)(p>1)$.

2. We discuss some special characters of isometric mapping between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$ and $l^p(\Delta)(p>1)$.

3. By lemmas, we get the isometric mapping between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$ and $l^p(\Delta)(p>1)$ maps the special element αe_γ to $\alpha' d_{\sigma(\gamma)}$. $\alpha, \alpha' \in S(C)$ they are not the same number.

4.We prove the isometric mapping between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$ and $l^p(\Delta)(p>1)$ can generate a surjective isometric mapping between $S(C)$, and this new mapping let α become α'.

5.Then we get the crucial result that the isometric mapping between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$ and $l^p(\Delta)(p>1)$ map the linear combination of the elements on the sphere of $l^p(\Gamma)$ to the similar linear combination of the elements on the sphere of $l^p(\Delta)$.

6.we arrive at a final conclusion that any surjective isometry between the unit spheres of complex Banach spaces $l^p(\Gamma)$and $l^p(\Delta)$ can be extended to be a linear isometry on the whole space.

Key Words: Unit Spheres, Extension of Isometries, Isometric mapping, Strict Convex

目录

第一章　　前言

1.1　单位球面间等距算子的延拓问题的背景

(E, d_E) 和(F, d_F) 是度量空间.映射$T : E \to F$ 如果满足

$$d_F(Tx, Ty) = d_E(x, y)$$

称之为等距映射，其中$x, y \in E$.

如果两个度量空间(E, d_E)，(F, d_F)之间存在这样的满等距映射，我们称这两个度量空间是等距的. 两个等距的度量空间本质上是相等的. 因此满等距映射实际上定义的是度量空间之间“相等”的概念. 研究度量空间之间的等距问题对于理解度量空间的结构有着重要意义.

对度量线性空间等距理论的研究一直是一个活跃的研究领域. 这一方面的经典结果是Mazur-Ulam 定理[1]：

$T : E \to F$ 是赋范空间E, F之间的任一满等距映射且有$T(0) = 0$，则T是一个线性算子.

Mazur-Ulam 定理描述了等距与线性的关系. 这一重要定理不但沟通了等距与线性之间的关系更是告诉我们对于赋范线性空间来讲，只要他们之间存在满等距并且满等距将0元映为0元，则这两个赋范线性空间实际上是“相等的”. 很自然的我们会问如下问题：

对于任意的度量空间E，F 之间的满等距映射T也满足$T(0) = 0$，它是否是线性的？这一问题仍未解决. 不过，Charzynski证明了如下的结果[2]：

$T : E \to F$ with $T(0) = 0$ 是两个n维度量空间E，F 之间的等距映射（不用强调满射），则它是线性的.

Wobst 将这个结果推广为[3]：

E 和F为两个度量线性空间，E 是有限维的，$T : E \to F$ 是一个满等距，且$T(0) = 0$，则T 是一个线性等距映射.

Wobst 还证明了一个更为一般的结果[3]：

E 和F为两个度量线性空间，$T: E \to F$ 是一个满等距，且$T(0)=0$. 如果存在实数$r>0, a>1, b>1$ 使得$d_E(2u,0) \geq ad_E(u,0)$ ，$d_F(2v,0) \geq bd_F(v,o)$对所有的$u \in E, d_E(u,0)<r$ 以及$v \in F, d_F(v,0)<r$，那么T是线性等距.

定光桂教授在[4]中证明了如下结论:

E 是一个具有局部中点结构的(F)空间，F是任意的(F)空间,$T: E \to F$是一个满等距，则它是一个仿射等距.

以上结果都是在实线性空间中讨论等距是否是线性的. 王键在[5]中考虑了复线性空间之间的等距是否是线性或仿射算子：

X，Y是复的F^*-空间，X是δ_1-中点有界或者拟凸. 满射算子$T: X \to Y$是δ_2-局部$\frac{1}{2^i}-$等距，其中$i \in \{0\} \cup \mathbf{N}$，那么$T$是实的仿射等距. 如果$T$还满足$T(ix)=iT(x), x \in X$，那么$T$也是复数域上的仿射等距.

以上所引用的文章都需要假设所研究的等距均为满等距. T.Figiel在[6]中去掉“满”等距这一假设条件，得到如下结论：

X，Y是赋范空间，对任意的等距嵌入$T: X \to Y$都存在一个线性映射使得$F \circ T$是X上的等距映射. 如果将F限定在$T(X)$的线性张上，那么它的范数为1.

Baker 在[7]中证明了：

从赋范空间到（满或不满）严格凸赋范空间的等距映射T一定是仿射算子.

P. Šemrl, and J.Väisälä 在[8]证明了如下结论

X，Y 是赋范空间，f是从X到Y“内”的等距映射. 设对每个单位元$y \in Y$ 存在$a, b \in X$ 以及实数s使得

$$||y-s(f(a)-f(b))||<\frac{1}{2},$$

那么f 是仿射算子，$f(X)$ 是Y的稠密子空间. 如果X是完备的，那么$f(X)=Y$.

1.2 单位球面间等距算子的延拓问题发展回顾

另一种Mazur-Ulam 定理的推广形式就是等距延拓问题. Mankiewicz 在[9]中证明了

等距映射将赋范空间E的一个连通子集映为另一赋范空间F的开子集，那么该等距映射能延拓为从E 到F的满仿射等距算子.

1987年，D.Tingley 在[10]中提出了如下问题：

$V_0 : S_1(E) \to S_1(F)$ 是赋范空间E, F的单位球面$S_1(E), S_1(F)$间的等距映射，是否存在一个等距映射$V : E \to F$，使得$V|_{S_1(E)} = V_0$?

此问题我们称为单位球面间等距算子的延拓问题.

这一问题看上去简单，却实在难以解决. 有限维赋范空间单位球面间等距算子的延拓问题仍未彻底解决. 甚至，对于二维赋范空间的情形也没有解决. 到目前为止，该问题只是针对一些特殊的赋范空间，利用它们的特殊性质，采用特殊技巧对该问题给出了肯定的回答. 对于这一问题我们只考虑实赋范空间，因为当空间为复赋范空间时它显然是不能成立的. 例如，$E = F = \mathbf{C}$ (复平面) $V(x) = \bar{x}, |x| = 1$.

在[10]中Tingley 得到了如下结论：

E, F是有限维的赋范空间，V_0是它们的单位球面$S(E), S(F)$之间的满等距，则有$V_0(-x) = -V_0(x), x \in S(E)$.

在[11]中被定光桂教授推广为

E是严格凸赋范空间，F是任意的赋范空间. V_0是它们的单位球面$S(E), S(F)$之间的等距（未必满），满足$-V_0[S(E)] \subset V_0[S(E)]$，那么$V_0$ 可以延拓为全空间上的线性等距.

在[12-14]中定光桂教授证明了三类特殊赋范空间的单位球面间满等距算子的表现形式. 它们不是已有结论[15]的简单推广. 利用这些表现定理，就能得到Tingley问题在特殊情况下的肯定回答.这些肯定回答如下：

V_0 是赋范空间$l^1(\Gamma), l^1(\Delta)$的单位球面间的满等距映射，那么它一定可以延拓为空间$l^1(\Gamma)$ 到$l^1(\Delta)$的满实线性等距.

V_0 是赋范空间$l^p(\Gamma), l^p(\Delta)$的单位球面间的满等距映射，那么它一定可以延拓为空间$l^p(\Gamma)$ 到$l^p(\Delta)$的满实线性等距.

V_0 是赋范空间$\mathcal{L}^\infty(\Gamma), \mathcal{L}^\infty(\Delta)$的单位球面间的满等距映射，那么它一定可以延拓为空间$\mathcal{L}^\infty(\Gamma)$ 到$\mathcal{L}^\infty(\Delta)$的满实线性等距.

利用上面先得到单位球面间等距算子的表现形式然后得到Tingley问题的肯定

回答的思路，在[16]中，安桂梅得到了如下结论

$0<\beta_n<1, V_0$是$S(l^{\beta_n})$到$S(l^{\beta_n})$的满等距映射，则V_0 可以延拓为全空间l^{β_n}上的实线性等距.

在[17]中王日生得到了如下关于直和空间的Tingley问题的肯定回答.

E,F是严格凸赋范空间的l^1直和，$T: S(E)\to S(F)$是它们的单位球面间的满等距算子，那么T可以延拓为全空间E上的实线性等距算子.

如果将满射这一条件去掉，那么单位球面间的等距延拓问题会变得更为复杂. 张伦在[18]中给出了一个反例来说明满射这一条件在很多情况下是必须的. 反例如下：

l_2^∞,l_3^∞是l^∞的2维和3维子空间，定义$T: l_2^\infty\to l_3^\infty$:

$$T((x_1,x_2))=\begin{cases}(1,\frac{3}{4}x_2,x_2), & x_1=1,x_2\geq 0,\\ (-1,x_2,\frac{3}{4}x_2), & x_1=-1,x_2\geq 0,\\ (x_1,1-\frac{1}{4}x_1,1), & x_2=1,x_1\geq 0,\\ (x_1,1,1+\frac{1}{4}x_1), & x_2=1,x_1<0,\\ (x_1,x_2,x_2), & x_2<0.\end{cases}$$

T是一个从$S(l_2^\infty)$到$S(l_3^\infty)$内的等距算子，但是它既不能延拓为全空间上的线性算子，也不能延拓为全空间上的等距算子.

在[19]中侯志彬却得到了如下的结论：

$0<p<\infty$，V_0是$L^p(T,\Sigma,\mu), L^p(\Omega,\Xi,\lambda)$的单位球面间的非满等距算子，那么$V_0$可以延拓为全空间$L^p(T,\Sigma,\mu)$上的线性等距.

以上的单位球面间等距算子的延拓问题都是在相同类型的空间之间讨论. 大家看到在这种情形下，很多经典Banach空间之间的Tingley问题都得到了肯定的回答. 定光桂教授首次在[20]中讨论了不同类型的赋范空间之间的Tingley问题，得到了如下结论：

E 是赋范空间，$sm[S(E)]$是E的单位球面的光滑点. V_0是$S(E)$到$S(C(\Omega))$的满等距算子，如果$sm[S(E)]$在$S(E)$中稠密，并且对每个$x\in S(E)$ 以及$x_0\in sm[S(E)]$有

$$\| V_0(x)-|\lambda|V_0(x_0)\|\leq\| x-|\lambda|x_0\|, \forall\lambda\in R.$$

那么V_0必可延拓为全空间上的线性等距算子.

方习年在[21]中得到了更为完美的结论：

E 是实赋范空间，V_0是$S(E)$到$S(C(\Omega))$的满等距算子，其中Ω为紧度量空间，那么V_0可以延拓为全空间E上的线性等距.

方习年在[22][23]中得到了如下结论：

E 是实赋范空间，V_0是$S(E)$到$S(l^1(\Gamma))$的满等距算子，那么V_0可以延拓为全空间E上的实线性等距.

E 是实赋范空间，V_0是$S(E)$到$S(l^p(\Gamma))$的满等距算子，那么V_0可以延拓为全空间E上的实线性等距.

程立新教授在[24]中对一类空间之间的Tingley问题得到结论如下：

X, Y为Banach空间，且$f : S(X) \to S(Y)$是一个满等距. C是球面$S(X)$的一个极大凸子集使得$int_{A_C}C \neq \emptyset$，则$f$在$X_C \equiv \overline{span}C$的自然延拓$f_*$是线性等距.

1.3　本文主要内容

本文要研究的是单位球面间等距算子的延拓. 这一专题的若干结果在上文已经进行了回顾. 在本文中本文着重研究复$l^p(\Gamma)(p > 1)$空间单位球面间等距算子的延拓问题. 在上文介绍的结果中我们总是假定空间为实的线性空间，这是必要的. 因为当$E = F = C$(复平面)，$V(x) = \bar{x}$ 显然此等距不能延拓为全空间上的复线性等距算子. 但是在诸多关于具体的空间的Tingley问题中，例如空间$l^p, L^p, C(\Omega)$等，我们要求空间中的元素－－数列（或函数）均为实值，这样的限定在研究问题时往往带来很多便利（比如单位球面间等距算子的表现形式容易得到）. 本文主要是去掉这一限定，对通常意义上的经典空间l^p之间的Tingley问题进行了研究，并得到了肯定的回答.

具体地说，分为以下步骤证明了本文最终的结论：

1、讨论了复的$l^p(\Gamma)(p > 1)$空间单位球面上元素的复杂性.

2、讨论了$l^p(\Gamma)(p > 1)$单位球面间的等距映射的若干独特性质.

3、通过引理得到$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p > 1)$单位球面间满等距映射将元素αe_γ（只在位置γ处有非零的分量）映为特殊元素$\alpha' d_{\sigma(\gamma)}$（只在位置$\sigma(\gamma)$处有非零的分量）.这里的$\alpha, \alpha' \in S(C)$ 并且它们并非同一数值，非零分量的位置也发生了漂移.

4、我们证明了$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p > 1)$单位球面间满等距映射尽管不能保证3中的$\alpha = \alpha'$，但是却得到了α到α'的映射是$S(C)$到$S(C)$的满射.

5、接下来我们证明关键的结论$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p > 1)$单位球面间满等距映射V_0将$l^p(\Gamma)$单位球面上的元素的线性组合映为$l^p(\Delta)$单位球面上完全类似的线性组合.

6、最后我们证明了$l^p(\Gamma)$与$l^p(\Delta)(p > 1)$单位球面间满等距映射能延拓为全空间上的实线性等距映射.

第二章　复$l^p(\Gamma)(p>1)$的单位球面间等距算子的延拓

2.1　单位球面间等距算子延拓问题的一些思考

E, F 是Banach 空间，P 是E的子集. 映射$T:P\to F$ 满足

$$\|Tx_1-Tx_2\|=\|x_1-x_2\|,\ \forall x_1,x_2\in P.$$

称为等距算子.

Mazur-Ulam 得到等距与线性结构的关系定理[1]：

$T:E\to F$ 是赋范空间E,F之间的任一满等距映射且有$T(0)=0$，则T是一个线性算子.

作为Mazur-Ulam 定理的推广，1972 Mankiewicz 在[9]中证明了：等距映射将赋范空间E的一个连通子集映为另一赋范空间F的开子集，那么该等距映射能延拓为从E 到F的满仿射等距算子.

1987年，D.Tingley 在[10]中提出了如下问题：

$V_0:S_1(E)\to S_1(F)$ 是赋范空间E,F的单位球面$S_1(E),S_1(F)$间的等距映射，是否存在一个等距映射$V:E\to F$，使得$V|_{S_1(E)}=V_0$?

对于一些经典Banach空间的TIngley问题，我们得到了肯定的回答.(参看[25])对于复的赋范线性空间来说，Tingley问题无法得到肯定回答. 例如$E=F=C$(复平面) and $V(x)=\bar{x}$. 于是我们总是假定所讨论的赋范空间是实线性的的到的全空间上的线性算子也是实线性的. 当然如果空间是复线性的，我们只要把它当做实线性的就可以了. 在诸多的研究结果中[25]我们做了更多的限定，例如[13]中令Banach 空间$l^p(\Gamma)$ (Γ 是指标集)中元素的分量均为实数，即

$$l^p(\Gamma)=\{x|x=\sum_{\gamma\in\Gamma}\xi_\gamma e_\gamma,\xi_\gamma\in R\},$$

其中$e_\gamma=\{\xi_{\gamma'}|\xi_\gamma=1,\xi_{\gamma'}=0,\gamma\neq\gamma',\gamma'\in\Gamma\},\forall\gamma\in\Gamma.$

如果我们将复的Banach空间$l^p(\Gamma)$ 看做实的Banach空间，那我们应该允许元素的分量为复数. 这样一种情形下，很难得到类似[13]中的结论. 究其原因是当限定$l^p(\Gamma)$ 中的元素的分量均为实数时，单位球面间等距算子的表现形式容易得到，而允许$l^p(\Gamma)$ 中的元素的分量为复数时，单位球面间等距算子的表现形式会更加复杂.

作为Tingley问题本身我们不会遇到这样的问题，正因为我们先要解决某些具体赋范空间的Tingley问题，才会做出一些特别的限定条件. 本文中我们就是将$l^p(\Gamma)$中元素分量为实数的限定去掉，让其为普通意义上的$l^p(\Gamma)$空间. 这样的$l^p(\Gamma)$ 和$l^p(\Delta)(p>1, p\neq 2)$ 空间我们称之为复的空间是为了与[13]中要求元素分量必须为实数的$l^p(\Gamma)$和$l^p(\Delta)(p>1, p\neq 2)$区别开来. 我们首先得到复的$l^p(\Gamma)$ 和$l^p(\Delta)(p>1, p\neq 2)$的单位球面间等距算子的表现定理，然后得到针对复$l^p(\Gamma)$ 空间的Tingley问题的肯定回答. 我们这里要求$l^p(\Gamma)(p>1, p\neq 2)$，当$p=2$时，相关的结果可以参看文[11].

2.2 一些引理

引理1 [11] E, F 是赋范线性空间，E是严格凸的，V_0 是单位球面$S_1(E)$ 到$S_1(F)$的映射. 如果$-V_0[S_1(E)]\subset V_0[S_1(E)]$ 并且

$$||V_0(x_1)-V_0(x_2)||\leq ||x_1-x_2||, \forall x_1, x_2\in S_1(E),$$

那么V_0 是一对一的映射，并且$V_0(-x)=-V_0(x)$,$\forall x\in S_1(E)$.

注 引理是针对普通的赋范空间的，如果空间本身是复的赋范空间，我们看做实的就可以了. 从引理的证明过程也看得出无论空间是实的还是复的都是正确的.

引理2 [13] 设$x, y\in l^p(\Gamma)$，则有

$$(supp\ x)\cap(supp\ y)=\emptyset\Leftrightarrow \|x+y\|^p+\|x-y\|^p=2(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

$$(supp\ x=\{\gamma|x(\gamma)\neq 0, \gamma\in\Gamma\}, p\geq 1, p\neq 2).$$

引理3 [13] V_0 是从$l^p(\Gamma)$的单位球面$S_1[l^p(\Gamma)]$到$l^p(\Delta)$的单位球面$S_1[l^p(\Delta)]$满等距映射(Γ, Δ 是两个指标集), $p>1, p\neq 2$. 那么

$$(supp\ x)\cap(supp\ y)=\emptyset\Leftrightarrow(supp\ V_0(x))\cap supp\ (V_0(y))=\emptyset.$$

引理4 [13] 设V_0 是引理3中的满等距映射. 那么

$$\bigcup_{\gamma\in\Gamma} supp\ V_0(e_\gamma)=\Delta,$$

其中$e_\gamma=\{\xi_{\gamma'}|\xi_\gamma=1, \xi_{\gamma'}=0, \gamma\neq\gamma', \gamma'\in\Gamma\}, \forall\gamma\in\Gamma$.

注 在[13]中，从引理2，3，4的证明能看出对于复的$l^p(\Gamma)$和$l^p(\Delta)$(允许元素的分量取复数) 这些结论都是正确的.

2.3 $l^p(\Gamma)(p>1)$单位球面间等距算子的表现形式

本文中，我们用C代表复数域，$S_1(C)$代表复数域中的单位球面，R表示实数域，$l^p(\Gamma)$ 和$l^p(\Delta)(p>1,p\neq 2)$ 都是复的赋范空间.

引理5 $l^p(\Gamma)$ 是复的赋范空间，V_0 是从$l^p(\Gamma)$的单位球面$S_1[l^p(\Gamma)]$到$l^p(\Delta)$的单位球面$S_1[l^p(\Delta)]$满等距映射，$p>1,p\neq 2$. 那么存在双射$\sigma:\Gamma\to\Delta$ 并且

$$V_0(\alpha e_\gamma)=\alpha' d_{\sigma(\gamma)}.$$

其中$\alpha,\alpha'\in S_1(C)$, $d_\gamma=\{\eta_{\gamma'}|\eta_\gamma=1,\eta_{\gamma'}=0,\gamma\neq\gamma',\gamma'\in\Gamma\},\forall\gamma\in\Gamma$.

证 $\forall\alpha\in S_1(C),V_0(\alpha e_\gamma)\in S_1[l^p(\Delta)]$，有$supp\ V_0(\alpha e_\gamma)\neq\emptyset$. 如果存在某个$\delta\in\Delta$满足$\delta\in supp\ V_0(\alpha e_\gamma)$，那么

$$V_0(\alpha e_\gamma)=V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}+V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\Delta\backslash\delta\}}.$$

令

$$y=\frac{V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}}{||V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}||}.$$

其中$V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}$是$l^p(\Delta)$中的元素，它在$\delta$这一位置分量等于$V_0(\alpha e_\gamma)$在$\delta$这一位置的分量，在其余位置的分量为0. 显然有$y\in S_1[l^p(\Delta)]$. 因为$V_0$ 是满射，则存在$x\in S_1[l^p(\Gamma)]$ 使得$V_0(x)=y$. 根据引理3，可得

$$\begin{aligned}[supp\ V_0(x)]\bigcap[supp\ V_0(e_{\gamma'})]&=(supp\ y)\bigcap[supp\ V_0(e_{\gamma'})]\\&\subset[supp\ V_0(\alpha e_\gamma)]\bigcap[supp\ V_0(e_{\gamma'})]=\emptyset,\end{aligned}$$

$$\forall\gamma\neq\gamma',\gamma'\in\Gamma.$$

根据引理3，有

$$(supp\ x)\bigcap(supp\ e_{\gamma'})=\emptyset,\forall\gamma\neq\gamma',\gamma'\in\Gamma.$$

于是$supp\ x=\{\gamma\}$. 对$x\in S_1[l^p(\Gamma)]$，有$x=\alpha_1 e_\gamma,\alpha_1\in S(C)$. 于是

$$y=\frac{V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}}{||V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}||}=V_0(x)=V_0(\alpha_1 e_\gamma).$$

如果有另一个$\delta' \in \Delta, \delta' \neq \delta$ 满足$\delta' \in supp\ V_0(\alpha e_\gamma)$，用同样的方法我们能够得到

$$y' = \frac{V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta'\}}}{||V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta'\}}||} = V_0(x) = V_0(\alpha_2 e_\gamma), \alpha_2 \in S(C).$$

再次使用引理3 就得到

$$(supp\ y)\bigcap(supp\ y') = \emptyset \Rightarrow (supp\ \alpha_1 e_\gamma)\bigcap(supp\ \alpha_2 e_\gamma) = \emptyset.$$

这是矛盾的. 因此$supp\, V_0(\alpha e_\gamma)$ 是单点集. 因为V_0 是单位球面间的满等距, $||V_0(\alpha e_\gamma)|| = 1 = ||V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}}||$. 于是就有$V_0(\alpha e_\gamma) = V_0(\alpha e_\gamma)|_{\{\delta\}} = y = \alpha' d_\delta$.

对于$\forall \alpha \in S_1(C)$，有$V_0(\alpha e_\gamma) = \alpha' d_\delta$. 由此，我们可以定义一个映射

$$\sigma : \Gamma \to \Delta,$$

$$\gamma \mapsto \delta,$$

$$\sigma(\gamma) = \delta.$$

据引理4，σ 是一个满射. 我们只需要证明它也是单射. 事实上，若$\gamma_1 \neq \gamma_2, \sigma(\gamma_1) = \sigma(\gamma_2) = \delta$那么根据引理3就有

$$(supp\ e_{\gamma_1})\bigcap(supp\ e_{\gamma_2}) = \emptyset \Rightarrow [supp\ V_0(e_{\gamma_1})]\bigcap[supp\ V_0(e_{\gamma_2})] = \emptyset.$$

这是矛盾的. 因此$\sigma : \Gamma \to \Delta$ 是一个双射. 于是就有

$$V_0(\alpha e_\gamma) = \alpha' d_{\sigma(\gamma)}.$$

显然当$\alpha \in S_1(C)$，那么$\alpha' \in S_1(C)$. 因为V_0 是从$S_1[l^p(\Gamma)]$ 到$S_1[l^p(\Delta)]$ 的满等距映射且$V_0(\alpha e_\gamma) = \alpha' d_{\sigma(\gamma)}$，那么认为$\alpha'$只能属于$S_1(R)$ 是不对的.

注 这个引理表明V_0将每个$\{\alpha e_\gamma \in S_1[l^p(\Gamma)], \alpha \in S_1(C), \gamma \in \Gamma\} \subset S_1[l^p(\Gamma)]$ 映为$S_1[l^p(\Delta)]$中具有单点支集的元素. 并且所有的$\{V_0(\alpha e_\gamma), \alpha \in S_1(C)\}$都有相同的单点支集. 但是我们不能得到$\alpha$ 和α'之间的具体关系. 你可能会觉得$\alpha = \alpha'$，只要看看前面的例子$E = F = C$(复平面), $V(x) = \bar{x}$，你就会放弃这种想法.

如果我们令$l^p(\Gamma)$中的元素的分量只能是实数，则有下面的引理.